Recherches n° 15, 2e semestre 1991

PETIT TRAITE D'INSUBORDINATION A L'USAGE DES MANIPULATEURS D'IMPLICATION

Patrick Ennebecq
Professeur de mathématiques
Collège Beaupré, Haubourdin

«Si l'Anglois tu vois, demain il pleuvra.
Si point d'Anglois ne vois, pluie déja là».
(proverbe flamand).

Le point de départ de cet article est l'activité suivante qui fut, entre autres endroits, proposée en novembre 90 à 8 professeurs de français et 10 professeurs de mathématiques réunis dans le cadre d'un stage PAF «Français-Maths». Je ne saurais que trop conseiller au lecteur point trop pressé -ni trop peu téméraire- de prendre un moment pour se lancer dans l'aventure de ces deux exercices avant de poursuivre sa lecture...

Dans chacun de ces deux exercices suivants une «proposition de départ» est formulée. Cette proposition sera supposée vraie. Trois «propositions voisines» sont ensuite formulées. Il s'agit, pour chacune d'entre elles, de décider si elles sont vraies, fausses ou indécidables au regard de leurs propositions de départ respectives..

Exercice 1:

Proposition de départ: «Si un sylphol est rouge, il sera de forme cubique».

Propositions voisines:

1. «Si un sylphol n'est pas rouge, il ne sera pas de forme cubique».
2. «Si un sylphol est de forme cubique, il sera rouge».
3. «Si un sylphol n'est pas de forme cubique, il ne sera pas rouge».

Exercice 2:

Proposition de départ: «Si Mireille vient, Jacques viendra».

Propositions voisines:

1. «Si Mireille ne vient pas, Jacques ne viendra pas».
2. «Si Jacques vient, Mireille viendra».
3. «Si Jacques ne vient pas, Mireille ne viendra pas».

Il convient avant toutes choses de donner quelques explications sur la conception de cette bien singulière activité, ainsi que sur le pourquoi et le comment de son utilisation dans ce stage. Cette activité a été conçue à un double niveau. Au premier de ces deux niveaux, on peut considérer ces deux exercices comme un travail préparatoire à une analyse théorique des phrases en «Si..., alors...» de la langue française, la dite analyse se trouvant justifiée par des préoccupations pédagogiques -formulées par les professeurs participant à ce stage- autour de la notion de «cause-conséquence» en français et de la notion de «réciproque»[1] en maths. A un second niveau, cette activité a été conçue dans un but de «métissage» entre professeurs de français et professeurs de maths. En effet une des difficultés majeures d'un stage de ce type est de parvenir -et si possible rapidement- à dépasser les attitudes de repliement disciplinaire qui feraient, par exemple et à peine caricaturalement, du domaine du raisonnement, le territoire d'élection et d'autorité des professeurs de maths et du domaine de la lecture, de la grammaire et de la production d'écrit, le territoire exclusif des professeurs de français. Parole des uns, silence des autres: chacun est expert en son domaine et nul travail commun n'est possible. Cette activité a donc aussi été conçue pour tenter de dépasser ces attitudes. Explications...

Dans chacun des deux exercices, les «propositions voisines» sont formées suivant le même «moule» syntaxique, à savoir:

Proposition de départ: «Si p, (alors) q.»

Propositions voisines:

1. «Si non p, (alors) non q.»
2. «Si q, (alors) p.»

1. — En mathématiques, par exemple à propos du célèbre théorème dit «de Pythagore», les deux propriétés suivantes sont considérées comme tout à fait différentes :
«Si le triangle ABC est rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ».
«Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors ABC est un triangle rectangle en A».
Ces deux propositions seront dites «réciproques» (l'une de l'autre). Il va sans dire que cette distinction, abordée dès la classe de quatrième, est source de nombreuses difficultés...

3. «Si non q, (alors) non p.»

Comme aucune règle du jeu indiquant le point de vue à adopter (formel ou pas?) n'est donnée pour résoudre ces exercices, mon analyse «a priori» fut la suivante:

- Les professeurs de maths seraient (plutôt) attirés par un modèle de type formel qui les conduiraient (plutôt) à fournir les mêmes réponses pour chacun des deux exercices.

- Les professeurs de français seraient (plutôt) attirés par les contenus sémantiques différents et donc plus enclins à fournir des réponses différentes.

En conséquence de quoi, le mode de «passation» -d'abord travail individuel, puis regroupement par 4 (2 professeurs de français et 2 professeurs de maths)- devrait alors susciter des débats passionnés, provoquer quelques métissages et in fine conduire «sur un plateau» à une intervention de ma part sur le thème: la logique formelle n'est pas toujours un bon modèle d'analyse du fonctionnement du langage et en particulier, il n'y a pas de «bonne» solution à cet exercice. Je dois confesser ici que la réalité dépassa (comme toujours) d'assez loin cette analyse «a priori»... Lors de la mise en commun des résultats des groupes, il se déclencha à vrai dire un petit cataclysme dans les tourbillons duquel il s'avéra que personne ou presque n'était d'accord avec personne, chacun défendant son point de vue avec plus ou moins de véhémence... Tant et si bien que mon intervention finale releva plus du sport que de la formation et me conduisit à méditer une fois de plus le fameux adage «Qui allume le feu, doit savoir l'éteindre».

Pour soulager modestement un éventuel lecteur qui, après avoir inconsidérément suivi mon conseil initial, serait à cet endroit en proie à de telles affres tourbillonesques, je me propose dans la suite de cet article de présenter quelques modèles théoriques d'interprétation des phrases en «Si..., alors...» à caractère implicatif, sans toutefois prétendre ni à l'exhaustivité (d'Aristote à nos jours, ce sujet a été le thème d'un nombre innombrable de publications), ni même à la rigueur qu'on ne saurait atteindre en si peu de lignes.

L'implication en logique formelle

Je n'aborderai ici que quelques aspects de la logique dite «logique des propositions» (qui est la plus simple d'accès et aussi la moins sophistiquée: il existe d'autres types de logique plus performantes comme par exemple la logique des prédicats, la logique modale, etc...).

Disons pour commencer que la logique des propositions se veut avant tout être une «langue artificielle dépourvue de toute ambiguité» (Grize) et qu'en cela elle se veut moins être une tentative de modélisation du langage naturel, qu'un instrument de description et de validation de certaines procédures de raisonnement.

Qu'est-ce qu'une «proposition» en logique formelle? C'est ce à quoi on ne peut attribuer que deux valeurs de vérité: le vrai ou le faux (principe -très réducteur- dit du tiers-exclus). Ainsi et par exemple, on pourra considérer que «Il pleut» est une proposition, mais que par contre «Avez-vous un parapluie?» n'en est pas une (on ne peut en effet traiter cette proposition en termes de vrai ou de faux). On formalise alors les propositions par des lettres telles que «p», «q», «r», etc... (Leurs valeurs sémantiques ne sont donc pas prises en compte). On définit ensuite trois opérateurs sur les propositions: les opérateurs «non», «et», «ou»[2]. Deux propositions «p» et «q» étant données, on considérera que «p ou q», «p et q», «non p» sont de nouvelles propositions, définies par leurs tables de vérité de la manière suivante:

p	non p
V	F
F	V

(Si p est vraie, non p est fausse et vice-versa).

p	q	p ou q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(Il y a ici deux propositions différentes en jeu, donc quatre possibilités: p vraie et q vraie, p vraie et q fausse, p fausse et q vraie, p fausse et q fausse ; «p ou q» sera alors vraie lorsqu'une au moins une des deux propositions sera vraie. On remarquera au passage que les propositions «p ou q» et «q ou p» sont équivalentes).

p	q	p et q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

(Toujours quatre possibilités, mais cette fois «p et q» n'est vraie que si les deux propositions sont vraies toutes deux à la fois).

Venons-en à présent à l'**implication formelle** que je noterai ici «p $\rightarrow$ q». Sa définition tient en peu de mots, mais pose une difficulté sémantique sur laquelle il importe de s'attarder. Tout d'abord il faut préciser que l'implication formelle n'est pas une relation entre propositions, mais un **opérateur** au même titre que les opérateurs «et», «ou», «non». Ceci n'est pas aisé à comprendre. On pourra toutefois ici songer à un opérateur bien connu de tout un chacun, la soustraction: 3 et 2 étant deux nombres, 3-2 est un nouveau nombre et non pas une

2. — Ces opérations sont en fait notées par des symboles ($\wedge$ pour «et», $\vee$ pour «ou», $\neg$ ou $\sim$ pour «non»). Par souci de simplification, j'utilise ici les «et», «ou», «non» du langage naturel, toutefois placés entre guillemets pour souligner le fait qu'ils n'ont pas ici les mêmes usages et sens que dans la langue française. De même j'utilise dans les tables de vérité les abréviations V pour vraie et F pour fausse, au lieu des codes 1 et 0 utilisés en logique des propositions. Pour plus d'information sur ces sujets, on pourra consulter : *Logique et connaissance scientifique* (Encyclopédie Pléiade, sous la dir. de J. Piaget, N.R.F, 1967 ; *Logique*, Bernard Meyer (PUF 1990) ; *Introduction à la logique formelle et symbolique*, Jean Salem (Nathan 1987).

relation entre 3 et 2. Ainsi il faut accepter que «p $\rightarrow$ q» est une nouvelle proposition et non pas une relation entre «p» et «q». Une autre difficulté tient aux possibles transcriptions de cet opérateur dans le langage naturel. Les deux transcriptions usuelles de «p $\rightarrow$ q» sont en effet: «p implique q» et «Si p, alors q». Outre le fait que ces deux transcriptions suggèrent une idée de relation entre deux propositions, ce que l'implication formelle n'est pas, il y a ici un risque bien réel de confusion entre logique formelle et fonctionnement du langage naturel.

Aussi et quoique certains auteurs aient proposé une transcription en «q conditionnel p» qui serait source de moins de confusions, j'en resterai pour ma part strictement à la forme symbolique «p $\rightarrow$ q» et demanderai de plus au lecteur de tenter d'oublier momentanément tout ce qu'il sait sur l'implication avant d'aborder la définition que voici...

L'implication formelle «p $\rightarrow$ q» est définie comme étant ***logiquement*** *équivalente*[3] *à la proposition «(non p) ou q», ce qui conduit à la table de vérité suivante:*

p	q	non p	p→q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

(La colonne «non p» est remplie à partir de la colonne «p». Ensuite la colonne «p $\rightarrow$ q» est remplie à partir des colonnes «q» et «non p» en employant les règles de fonctionnement de l'opérateur «ou» définies ci-avant).

Le lecteur comprendra sans doute à présent plus aisément pourquoi je lui ai préalablement conseillé de renoncer à toute idée de transcription dans le langage naturel, car pour le moins cette définition peut sembler étonnante, voire paradoxale, si l'on transcrit «p $\rightarrow$ q» en le «Si p, alors q» du langage naturel. En effet et par exemple, si «p» est fausse, «p $\rightarrow$ q» est vraie quelque soit la valeur de vérité de «q». Autrement dit le faux implique le vrai -«Ex falso sequitur quodlibet»!- et donc une proposition telle que: «Si le nombre de chômeurs en France diminue, alors le prix du tabac augmente», pourrait être considérée comme vraie au moment où j'écris ces lignes. De même, puisque les éventuels rapports sémantiques entre les deux propositions ne sont pas pris en compte, une proposition comme «Si le nombre de chômeurs en France augmente, alors le temps devient plus froid» peut également être considérée comme vraie. Mais ceci n'est qu'un jeu trompeur d'images, car encore une fois la logique formelle est une langue artificielle, réglée par une syntaxe particulière, qui ne prétend pas modéliser le fonctionnement du langage naturel.

3. — Deux propositions sont dites «logiquement équivalentes» lorsqu'elles ont exactement les mêmes tables de vérité.

Pour en terminer avec cette partie, on peut démontrer[4] que seule la proposition «non q → non p» (qu'on appelle parfois «contraposée») est logiquement équivalente à la proposition «p → q». Autrement dit: de toutes les propositions voisines présentées dans l'exercice, seule la troisième est logiquement équivalente à la proposition de départ, ce qui signifie en particulier que les propositions «p → q» et «(non p → non q» ne sont pas logiquement équivalentes: de la vérité de «Si p, (alors) q», on ne peut logiquement inférer la vérité de «Si non p, (alors) non q» (du point de vue de la logique formelle en tout cas...)

Si l'on adopte le modèle de la logique des propositions pour traiter l'activité présentée au début de cet article, les réponses seront donc identiques pour chacun des deux exercices, à savoir: indécidable, indécidable, vraie. On pourra toutefois et raisonnablement objecter que, si l'obscur contenu sémantique du premier exercice (C'est quoi, un sylphol?) peut éventuellement se prêter à un tel traitement formel, il n'en est pas de même pour le second. En particulier si l'on admet que la proposition «Si Mireille vient, Jacques viendra» est vraie, il semblerait pour le moins que la vérité de la proposition «Si Mireille ne vient pas, Jacques ne viendra pas» puisse difficilement être mise en doute. Mais pour tenter d'analyser cette impression, il faut adopter un autre point de vue...

Le point de vue de la psychologie cognitive

De nombreuses études et expérimentations ont été effectuées par la psychologie cognitive sur le thème de l'implication[5]. Je me bornerai ici à mentionner deux points concernant directement notre sujet:

-Si les contenus sémantiques des deux propositions en jeu ne sont ni trop obscurs, ni trop exotiques, l'implication est très majoritairement «comprise» comme une équivalence. De la proposition «Si Mireille vient, Jacques viendra», nous inférerons en règle générale une proposition du type «Jacques ne viendra **que si** Mireille vient» et accorderons alors à la proposition «Si Mireille ne vient pas, Jacques ne viendra pas» une valeur de vérité[6] très proche de celle de la proposition de départ. (Dans «Les échelles argumentatives»[7], Oswald Ducrot développe un modèle linguistique d'interprétation des phrases en «Si..., alors...» à caractère implicatif qui le conduit à des conclusions similaires).

4. — Je laisse le soin au lecteur qui ne m'accorderait pas confiance sur ce point, de construire la table de vérité de «(nonq) → (nonp)» et de constater qu'elle est exactement semblable à celle de «p → q».

5. — On pourra par exemple consulter sur ce sujet : *Les activités mentales,* J.-F. RICHARD (Armand Colin 1990) ; «Influence du décor et du langage dans les épreuves de type logique portant apparemment sur l'implication logique», B. DUMONT (1982), in *Educational studies in mathematics* (n° 13).

6. — Plutôt que le terme «valeur de vérité», il faudrait sans doute employer ici le terme de «valeur épistémique». La valeur épistémique d'une proposition est le degré de certitude qu'un individu ou une collectivité attribue subjectivement à une proposition. Sur cette notion et son intérêt dans les discours argumentatifs, voir : «Pour une approche cognitive de l'argumentation», R. DUVAL, (1990), in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* (n° 3), (Strasbourg).

7. — *Les échelles argumentatives,* O. DUCROT (Editions de Minuit, 1980).

- Il ne semble pas que notre cerveau dispose d'une méta-structure formelle pouvant nous amener, en l'absence de règle du jeu explicitement formulée, à traiter de la même manière une classe de problèmes similaires. Nos représentations semblent plutôt s'élaborer en termes de «schèmes d'action» à usages locaux et particuliers[8]. Autrement dit le contenu sémantique et le contexte interviennent de manière centrale dans l'élaboration de nos représentations. (A propos de contexte, il faut d'ailleurs noter que nombre de personnes font appel, pour justifier leurs réponses à ces deux exercices, à un contexte imaginaire comme par exemple «Si les sylphols sont des êtres animés, on peut dire que etc...»).

Mais alors, comment fallait-il répondre à ces deux exercices?

La réponse correcte est... Qu'il n'y a pas une «bonne» réponse, mais plusieurs types de réponses possibles, étant donné qu'aucune règle du jeu n'est fournie au départ. A chacun donc de fournir ses réponses et ses règles du jeu... Pour ma part, je donnerais volontiers:
- Indécidable, indécidable, vraie pour les sylphols (règles de la logique formelle).
- Vraie, indécidable, indécidable pour Mireille («logique du sens»). Mais ceci n'est qu'une opinion parmi d'autres[9]...

Français et Maths: quelle interdisciplinarité?

En guise de conclusion, je voudrais aborder ici en quelques lignes -car ce n'est pas le sujet de cet article- le délicat problème des relations entre professeurs de français et de mathématiques.

Il est à présent un fait bien connu: la classe de mathématiques est aussi un lien d'utilisation du langage et les types de langages qui y sont employés sont d'une spécificité et d'une complexité bien réelles. A moins de croire que l'élève s'appropriera «naturellement» cette spécificité langagière, on se doit donc de mettre en place un apprentissage sur ces sujets. Je pense pour ma part que cet apprentissage ne doit pas être entièrement reporté sur la classe de français — «Dis, dans les copies qu'ils me rendent, ils ne savent vraiment pas utiliser les connecteurs... Tu ne pourrais pas voir ça avec eux?»—, mais que par contre il y a lieu de développer, à **l'intérieur même de la classe de mathématiques**, des apprentissages spécifiques sur ces problèmes de langage. Car enfin, lorsqu'on enseigne une discipline, la moindre des choses est d'enseigner **aussi** les modes langagiers propres à cette discipline et par là de ne plus considérer qu'il y aurait une «capacité transversale» du type «Savoir lire/Savoir écrire» dont la maîtrise

8. — Notion en particulier utilisée par G. Vergnaud en didactique des mathématiques.
9. — Certains professeurs m'ont en particulier déclaré que leurs réponses seraient différentes si dans le second membre, le présent était employé à la place du futur.

par l'élève ne relèverait que du seul professeur de français. Hélas, dans l'état actuel des choses, nulle place, ni dans la formation des maîtres, ni dans les contenus des instructions et programmes de mathématiques, n'est faite à ces sujets... La courte analyse, faite ici, des phrases en «Si..., alors...» montre pourtant que leur usage en classe de mathématique est sous-tendu par une règle du jeu bien spécifique -celle de la logique formelle- qui n'est pas du tout celle qui sous-tend l'usage du «Si..., alors...» dans le langage naturel. Et faute d'éclairer l'élève sur ces différents points de vue possibles (il y aurait d'ailleurs et peut-être sur ce point une belle occasion de travail «à égalité» entre professeurs de français et de mathématiques), il risquera comme bien souvent de n'y voir que du feu...